Prawdopodobieństwo - kombinatoryka.

Do rozwiązywania zadań z prawdopodobieństwa niezbędna jest umiejętność liczenia elementów w zbiorze, tzw. liczność zbioru nazywana inaczej mocą zbioru.

Elementy w danym zbiorze mogą przybierać różnego rodzaju postaci. W zależności od zadania mogą to być np.

ZBIORY JEDNOELEMENTOWE!

- wynik rzutu monetą:

O	R

- MOC TEGO ZBIORU = 2

- wynik rzutu kostką(ilość oczek):

1	2	3	4	5	6

- MOC TEGO ZBIORU = 6

- wybór jednej karty z tali 52 kart, - MOC TEGO ZBIORU = 52

ZBIORY DWUELEMENTOWE!

- wynik rzutu dwoma różnymi monetami:

(O,O)	(O,R)
(R,O)	(R,R)

- MOC TEGO ZBIORU = 4

- wynik rzutu dwoma kostkami:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,6)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- MOC TEGO ZBIORU = 36

Należy tu wyjaśnić, że pojedynczymi elementami w tych zbiorach są pary!

Pokazałam kilka przykładów, w których w zasadzie można moc danego zbioru policzyć w pamięci. Jednak większość zadań, które są rozwiązywane, wymaga policzenia mocy danych zbiorów używając narzędzi kombinatorycznych, takich jak:

- permutacje $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$,
- kombinacje $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$,
- wariacje bez powtórzeń $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, gdzie *k* jest mniejsze lub równe *n*.
- wariacje z powtórzeniami $W_n^k = n^k$

Każdego z tych narzędzi należy stosować w zależności od specyfiki danego zadania.

No właśnie! Kiedy stosować odpowiedni wzór? Postaram się pokrótce to wytłumaczyć.

- Zacznijmy od **permutacji**. $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$
  Jeżeli w zadaniu mamy powiedziane, że wykonujemy operacje na wszystkich elementach, wówczas należy skorzystać z permutacji.
  <u>*Przykład* 1:</u>
  Na ile sposobów możemy ustawić 3 książki na półce?

BARDZO WAŻNA UWAGA!!!!
Elementami w naszym zadaniu nie są owe książki, tylko **ich różne ustawienia!**

- Oczywiście możemy wykonać takie ćwiczenie i przekonać się ile jest takich możliwości ;) może najpierw policzymy a dopiero potem pokażemy, że rzeczywiście tak jest.
  Korzystamy z permutacji!
  P(3)=3!=1*2*3=6
  Zatem wszystkich elementów w naszym zbiorze jest 6 tzn. na 6 sposobów możemy ustawić 3 książki.

I	II	III
I	III	II
II	I	III
II	III	I
III	II	I
III	I	II

- *Przykład 2.*
  Na ile sposobów możemy ustawić 5 osób w kolejce?
  Przykład 3.

Ile jest możliwych wyników ukończenia biegu przez 8 zawodników?
UWAGA! Zawodnicy nie dzielą miejsc ex aequo.

- Kolejny rodzaj - **kombinacje**. $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Jeżeli z określonych elementów mamy wybrać kilka i <u>kolejność wybranych elementów nie odgrywa roli</u>, wówczas należy skorzystać z kombinacji.
<u>*Przykład* 1:</u>
Na ile różnych sposobów możemy wybrać 3 osoby do kina spośród 7.

BARDZO WAŻNA UWAGA!!!!
Elementami w naszym zadaniu nie jest 7 osób, tylko **elementami są różnie wybrane trójki, które pójdą do kina!**

-

W tym zadaniu byłoby trudno pokazać, ile tych trójek jest, dlatego po prostu to policzymy.
Ilość osób, jakimi dysponujemy, to 7, czyli n=7, będziemy wybierali po 3 osoby, zatem k=3.
Podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:

$$C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{6\cdot 4!} = 5\cdot 7 = 35$$

<u>*Przykład 2:*</u>
Ile możemy wylosować różnych par kart z talii 52 kart?
Proszę zauważyć, że to, jak my będziemy trzymali wylosowane karty, nie ma znaczenia, dlatego korzystamy z kombinacji.
PAMIĘTAJ! Tylko w kombinacjach w wybranych elementach **<u>kolejność nie odgrywa roli!</u>**

- Przyszła pora na **wariacje bez powtórzeń** $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Jeżeli z określonych elementów mamy wybrać kilka, tak, że nie będą się one powtarzały, ale z treści zadania wynika, że <u>kolejność wybranych elementów odgrywa rolę</u>, wówczas należy skorzystać z wariacji bez powtórzeń.
<u>*Przykład* 1:</u>
Mamy do dyspozycji 9 drewnianych klocków, na których są pomalowane cyfry od 1 do 9. Ile możemy ułożyć liczb czterocyfrowych, wybierając kolejno bez zwracania 4 klocki?

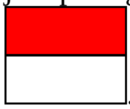
BARDZO WAŻNA UWAGA!!!!
Elementami w naszym zadaniu nie jest owe 9 klocków, tylko **elementami są różnie wybrane czwórki, których różny układ będzie tworzył liczbę czterocyfrową!**

- Rozwiązanie:

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{5!\,6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 3024$$

UWAGA! Dlatego w tym zadaniu wybraliśmy wariacje bez powtórzeń, ponieważ ułożenie naszych czterech klocków będzie ważne. Każde inne ustawienie tych samych klocków zmienia nam liczbę!
<u>*Przykład* 2:</u>

Na ile sposobów można wybrać trójkę klasową z klasy liczącej 30 uczniów?
Rozwiązanie: I w tym zadaniu będziecie musieli wykorzystać wariacje bez powtórzeń, ponieważ ważne jest jaką funkcję będzie pełniła każda z osób w wybranej trójce (chodzi o przewodniczącego, zastępcę i oczywiście skarbnika). Jedna osoba może pełnić tylko jedną funkcję.

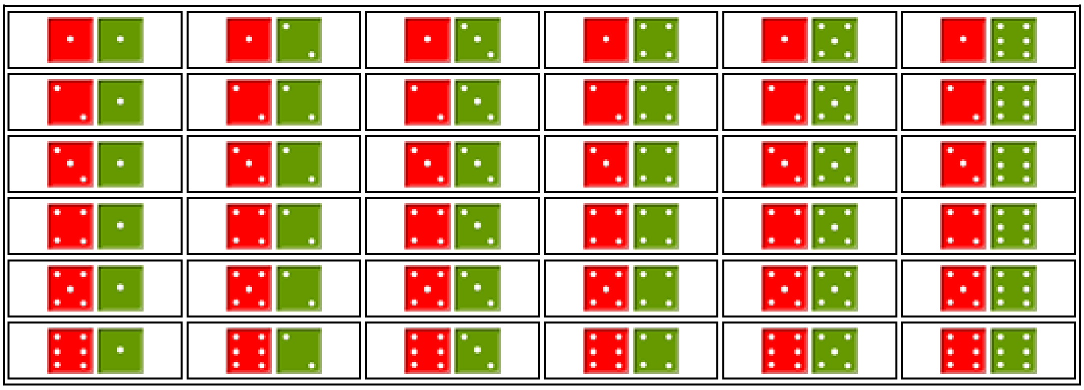
- *Przykład 3*:
  Ile możemy ułożyć flag dwukolorowych dysponując 5 kolorami?
  Rozwiązanie: Pamiętaj, że układ kolorów na fladze może symbolizować inne kraje. np. flaga biało-czerwona określa Polskę , natomiast flaga czerwono-biała to Indonezja .

- Ostatni wzór - **wariacje z powtórzeniami** $W_n^k = n^k$

Jeżeli z określonych elementów mamy wybrać kilka i może się zdarzyć, że wybrane elementy będą się powtarzały, wówczas należy skorzystać z wariacji z powtórzeniami.
Przykład 1:
Na ile sposobów możemy uzyskać różne wyniki, przy rzucie dwiema różnymi kostkami?
Rozwiązanie:
n=6, k=2

$$W_6^2 = 6^2 = 36$$

Może się tak zdarzyć, że na obu kostkach wypadnie ta sama liczba oczek, zatem uznajemy, że elementy mogą się powtarzać. W tego typu zadaniach należy wiedzieć, że aby odpowiedź była poprawna zakładamy, że te same układy oczek, ale na różnych kostkach, dają inne wyniki, np. (1,5) czy (5,1). W pierwszej sytuacji 1 wypadła na pierwszej kostce natomiast 5 na drugiej. Następna sytuacja pokazuje, że oczka wypadły odwrotnie.



Opracowała: mgr Jadwiga Feter